DOI: 10.25205/978-5-4437-1691-6-103

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МАССОПЕРЕНОСА В ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ*

HYDRODYNAMIC MODEL FOR MASS TRANSFER PREDICTION IN BUBBLY MEDIA

И. О. Стародумов[1], П. В. Микушин[1,2], К. Е. Махаева[1], М. А. Никишина[1], И. Г. Низовцева[1]

[1] Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург
[2] Московский физико-технический институт

I. O. Starodumov[1], P. V. Mikushin[1,2], K. E. Makhaeva[1], M. A. Nikishina[1], I. G. Nizovtseva[1]

[1] Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg
[2] Moscow Institute of Physics and Technology

✉ ilya.starodumov@urfu.ru

Аннотация

Представлена модель массопереноса в пузырьковом потоке, связывающая поток вещества из пузыря с его геометрическими и динамическими характеристиками. Модель основана на работах В. Г. Левича и справедлива в приближении установившейся однородной пузырьковой среды. Результаты позволяют прогнозировать массообменные характеристики химических или биологических реакторов, комбинируя представленную модель с фотографиями и видеозаписями пузырькового течения.

Abstract

A model of mass transfer in a bubble flow is presented that relates the flow of matter from a bubble to its geometric and dynamic characteristics. The model is based on the works of V. G. Levich and is valid in the approximation of a steady-state homogeneous bubble medium. The results allow us to predict the mass transfer characteristics of chemical or biological reactors by combining the presented model with photo/video records of bubble flow.

Рассмотрим процесс растворения труднорастворимых газов в жидкости (воде) на примере системы из одного пузыря с воздухом (кислородом). Интенсивность этого процесса ограничена скоростью отвода растворенного газа от поверхности пузыря со стороны жидкой фазы.

Одним из наиболее общих уравнений, описывающих массоперенос в такой системе выступает уравнение конвективной диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D \nabla C - \mathrm{v} C \right) + \mathcal{R} \,,$$

где $C = C(\mathbf{r},t)$ — концентрация растворенного кислорода, t — время, D — коэффициент диффузии, $\mathbf{v}$ — поле скорости жидкости, $\mathcal{R}$ — функция источника или стока вещества (применяется для учета химических и биологических реакций с участием растворенного газа).

В упрощенной постановке задачи коэффициент диффузии можно считать постоянным, источники и поглотители отсутствуют, а поле скоростей описывает несжимаемый поток с нулевым значением дивергенции. Предположим, что концентрация растворяющегося газа на поверхности пузырька остается постоянной, а газ растворяется стационарно за счет конвективного переноса растворенных молекул. Также будем считать, что пузырь сферический, а поле скоростей набегающей жидкости симметрично по углу ϕ. Так как движение пузыря симметрично относительно вертикальной оси, скорость движения жидкости не зависит от угла ϕ и равна нулю ($v_\phi = 0$). Поэтому при переходе к сферическим координатам с началом в центре пузыря (угол θ отсчитывается от точки набегания потока против часовой стрелки) можно опустить лишние слагаемые. Таким образом, с учетом вышесказанного уравнение конвективной диффузии примет вид:

$$v_r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right).$$

* Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (№ 24-11-00351).

При больших значениях числа Пекле можно не учитывать член $\frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}$. Это происходит благодаря тому, что $Pe = Re \cdot Sc = \frac{UR}{D}$. Таким образом получаем уравнение пограничноголоя:

$$v_r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial C}{\partial \theta} = D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}$$

с граничными условиями:

$$C = C^* = \text{const при } r = R,$$
$$C \to C_\infty = \text{const при } r \to \infty.$$

Для решения воспользуемся подходом, предложенным В. Г. Левичем [1], вводя в рассмотрение функцию тока ψ такую, что:

$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$
$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

При этом граничные условия для функции тока будут иметь вид:

$$C = C^* = \text{const при } \psi \to 0,$$
$$C \to C_\infty = \text{const при } \psi \to \infty.$$

Тогда можно рассматривать концентрацию как функцию $C\left(\theta, \psi\left(\theta, r\right)\right)$. Выполнив данную подстановку, можно получить выражение для плотности диффузионного потока:

$$j = -D\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{DRv_0 \sin^2\theta\left(C_\infty - C^*\right)}{\sqrt{Dv_0 R^3\left(\frac{2}{3} - \cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)}} = \frac{D\left(C^* - C_\infty\right)}{\delta},$$

где δ — толщина диффузионного слоя пузыря, равная

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{DR}{v_0}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{2+\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}}.$$

Таким образом можно вычислить полный поток вещества через поверхность пузыря Σ:

$$J \overset{\text{def}}{=} \int_\Sigma \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi R^2\int_0^\pi j\sin\theta d\theta,$$
$$J = 8\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{Dv_0}{R}\right)^{1/2} R^2\left(C^* - C_\infty\right).$$

Для умеренных чисел Рейнольдса Левичем была предложена связь между скоростью движения жидкости на поверхности пузыря v_0 и скоростью набегающего потока U (также относительная скорость движения пузыря) [1]:

$$U = \frac{2}{3}v_0.$$

Таким образом, если пренебречь диффузионным потоком в области отрыва (так как площадь поверхности данной области мала), итоговая формула для полного потока вещества представима в виде

$$J = 8\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{DU}{R}\right)^{1/2} R^2\left(C^* - C_\infty\right).$$

В безразмерном виде поток растворенного газа можно записать как число Шервуда, выраженное через числа Рейнольдса и Шмидта:

$$\langle \beta \rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{\langle j \rangle}{C^* - C_\infty} = \frac{J / S_\Sigma}{C^* - C_\infty},$$

$$Sh \overset{\text{def}}{=} \frac{\langle \beta \rangle L}{D} = \frac{JR}{S_\Sigma D \left(C^* - C_\infty \right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Re^{1/2} Sc^{1/2}.$$

Здесь $\langle \beta \rangle$ — средний по поверхности коэффициент массоотдачи (усреднение локального коэффициента массоотдачи как полный поток вещества, деленный на полную площадь поверхности межфазной границы), S_Σ — площадь поверхности пузыря.

Полученная модель, связывающая поток газа из пузыря в жидкость с размерами и скоростью пузыря, может использоваться для анализа пузырьковых сред по данным фотографий и видеосъемки с применением алгоритмов компьютерного зрения. Так, при помощи нейросетевой модели сегментации могут быть найдены параметры, определяющие интенсивность массообмена в пузырьковой среде: размеры газовых включений и их скорости. Например, в работе [2] показана возможность эффективной сегментации пузырей в газонасыщенной среде как классическими методами компьютерного зрения, так и нейросетевыми алгоритмами. Эти методы могут быть расширены за счет представленной модели и использоваться для уточнения локальных массообменных характеристик в пузырьковых средах химических и биологических реакторов [3].

Литература

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2016. С. 699.

2. Nizovtseva I. et al. Assessing the mass transfer coefficient in jet bioreactors with classical computer vision methods and neural networks algorithms // Algorithms. 2023. Vol. 16. P. 125.

3. Кафаров В. В., Винаров А. Ю., Гордеев Л. С. Моделирование биохимических реакторов. М.: Лесная промышленность, 1979. С. 344.